

# 3年3組 数学科学習指導案

## 1 題材名 円の敷き詰めと長方形

### 2 題材について

#### (1) 題材観

この題材は、大きく次の2つの問題に分けられる。①長方形の中に半径の等しい円を最大で何個敷き詰めることができるか考える。②半径の等しい  $x$  個の円に外接する長方形で、面積が最小となるものを考える。今回の授業では、生徒が考えやすいように円の半径を 1 cm で統一して考える。

私たちの身の周りには、円が含まれているものがたくさんある。例えば、ジュースなどの飲料水を入れている缶やペットボトル、鉛筆やペン類、ストロー、コイン、ボール……。これらを長方形の箱に詰める場面は日常生活の中に多くあり、生徒たちにも身近に感じられるものである。

3つの円を漢字の「品」のように互いに接するように並べたとき、これらの円の中心をそれぞれ結ぶと、1辺が2 cmの正三角形が現れる。三平方の定理から、この正三角形の高さは  $\sqrt{3}$  cm となるので、「品」のように並べた3つの円に外接する長方形は、縦の長さが  $\sqrt{3} + 2 \approx 3.73$  cm となる。並べた円の中に正三角形が現れること、また、そこから外接する長方形の辺の長さが  $\sqrt{3}$  を使って求められることは、生徒にとって驚きがあり、数学の奥深さを実感できるであろう。

今回の授業では、数十年前まで学校給食で用いられていた牛乳ビンと牛乳ケースを授業の導入に使う。40本の牛乳ビンが  $5 \times 8 = 40$  の並びで牛乳ケースに隙間なく敷き詰められており、一見するとこれ以上牛乳ビンが入る余地はないと思われる。しかし、前述の「品」のように円を半分ずらして敷き詰めていくこと

で、この牛乳ケースに41本目が入る。このことを、生徒同士の対話や実験・観察を通して生徒自身に発見させ、驚きや感動を味わわせたい。その後、この41個の牛乳ビンを入れるためのケースについて考える。その際、この事象を数理的に捉え、数学的に処理し、問題を解決させていく。具体的には、牛乳ビンを円、ケースを長方形として捉える（事象の数学化）、円の半径を1 cm という単純な値にする（問題の単純化）、解決の過程で現れる平方根は小数第2位までの概数で処理していくなどである。このように数学的に表現した問題に対して、その本質を見いだし（洞察力）、問題を解決するための見通しを立てる力（構想力）を培い、的確かつ能率的に処理する力を養いたい。そして再び、日常生活や社会の事象に活用できるようにしていきたい。

#### (2) 大会主題との関連

40本入りの牛乳ケースに41本目を入れる方法を考える際、生徒同士の対話の場面を設定する。また、生徒の手元には、牛乳ビンの代わりとしてペットボトルのキャップを41個渡して実験・観察する場面を設定する。そして、前述したように、日常の問題を数学の問題として焦点化、単純化して考えていくことが、大会主題の「数学的活動を通して」に迫っていけると考える。さらに、この円の敷き詰め問題は、球の敷き詰め問題など空間図形にも発展していく。化学の原子・分子構造にも関連してくるものであり、今回の題材でその基礎を身に付けることは、未来を拓く子どもたちに大変意義のあるものと考えられる。

### 3 指導及び評価の計画

#### (1) 指導計画 (11 時間扱い)

- ・三平方の定理 4 時間
- ・平面図形への利用 4 時間 (本時 4 / 4)
- ・空間図形への利用 3 時間

#### (2) 評価計画

	数学への 関心・意欲・態度	数学的な 見方や考え方	数学的な技能	数量・図形などに ついての知識・理解
評価 規準	41 個の円が入っている長方形の大きさを他者の意見を取り入れながら考えようとしている。	互いに接している円の並びの中から、正三角形や直角三角形を見だし、これらの図に外接する長方形の縦・横の長さ、面積を求める計算に活用することができる。	三平方の定理を用いて、互いに接している 3 つ以上の円に外接する長方形の縦・横の長さ、面積を求めることができる。	3 つの円が互いに接している場合、円の中心をそれぞれ結び正三角形ができ、正三角形の高さが 3 つの円に外接する長方形の辺の長さに関係することを理解している。

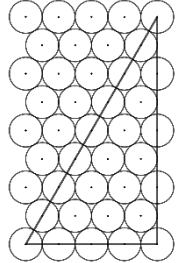
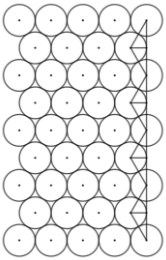
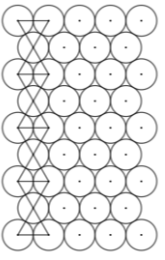
### 4 本時の指導

#### (1) ねらい

- ・円が敷き詰められた図の中から、直角三角形や正三角形を見出すことができる。(数学的な見方や考え方)
- ・三平方の定理を活用して外接する長方形の辺の長さ・面積を求めることができる。(数学的な技能)

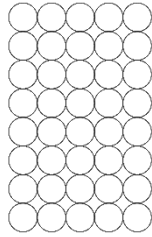
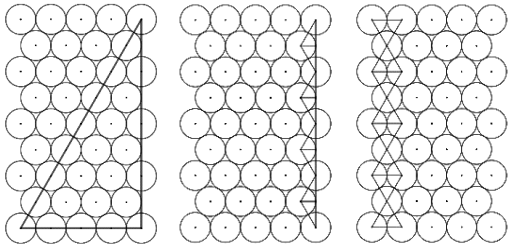
#### (2) 展開

過程 【分】	学習内容と学習活動	支援 (◎) 留意点 (●) 評価 (◇)
導入 【20】	<p>○ 課題をつかむ</p> <p>ある中学校の 3 年〇組では、生徒 39 人、担任の先生 1 人の合計 40 人で毎日楽しく給食を食べていました。ある日、給食当番牛乳係の S くんがいつも通り給食室から牛乳を運び出そうとしたとき、給食室担当の先生からこう言われました。 「今日から 3 週間、教育実習の先生が S くんのクラスで給食を食べるから、もう 1 本牛乳を持って行ってほしい。」 さあ S くん、あなたならどうしますか？</p> <p>&lt;予想される生徒の考え&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 1 本横にして上に置いて、押さえながら運ぶ。</li> <li>・ 1 本縦にして上に置いて、押さえながら運ぶ。</li> <li>・ 牛乳係をもう 1 人連れてくる。</li> <li>・ 1 本はポケットに入れる。</li> <li>・ 自分の分はその場で飲んでしまう。</li> <li>・ 実習生には自分で運んでもらう。</li> </ul> <p style="text-align: right;">などなど</p> <p>○ 学習プリント 1 で、現在の状況を確認する。</p>	<p>●横にするとこぼれる、上に乗せると危ない、給食室が混雑するから運ぶ人の数は増やせない、など理由をつけてこれらの案を却下する。</p> <p>●学習プリント 1 を配付する。</p>

	<p>40 個の円の横の幅 10 cm 縦の幅 16 cm</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">41 本の牛乳ビンを運ぼう</div> <p>○ 3～4 人グループになり，ペットボトルキャップを使って 41 本の牛乳を運ぶために他にどんな方法があるか，実験・観察を通して考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・互い違いにずらして入れると 41 本入りそう。 →実際に牛乳ビンでやってみる。 →入った！お～～～☆</li> </ul> <p>○ どうして入ったのか，理由を考える。 &lt;予想される生徒の考え&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 4 つの円の間のすき間より， 3 つの円の間のすき間の方が小さくなるから。</li> <li>・ 1 段目の円と円の間に 2 段目の円が入ることにより，縦の長さが少しずつ短くなっていき， 9 段目が入った。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 円の半径を 1 cm とする。 ※実際の牛乳ビンの半径は 1 cm ではないが，考えやすくするために値をできるだけ簡単な数にするとよいことを確認する。</li> <li>● 各グループに 41 個のペットボトルキャップ，学習プリント 1 の長方形を切り抜いた厚紙（牛乳ケースの代わり）を配付する。</li> <li>● 円と円のすき間の面積に着目する生徒も多いと考えられるが，この考えを十分認めた上で，今回は 41 個の円の縦の幅の長さに特に着目させる。</li> <li>● 41 個目が入るまでの過程を，パワーポイントを活用し視覚的に捉えさせる。</li> </ul>
展開	<学習問題> 41 個の円の縦の幅を求めよう	
【15】	<p>○ 机を前に向け，個人で考える。</p> <p>&lt;予想される生徒の考え&gt;</p> <p>①</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 底辺 8 cm，斜辺 16 cm の直角三角形から三平方の定理（または 1 : 2 : <math>\sqrt{3}</math>）を使い，直角三角形の縦の長さを求め，両端の 2 cm をたす。</li> </ul> <p>②</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 底辺 1 cm，斜辺 2 cm の直角三角形を使う。</li> </ul> <p>③</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 1 辺 2 cm の正三角形を使う。</li> </ul> <p style="text-align: center;">縦の幅は <math>8\sqrt{3} + 2</math> cm</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 学習プリント 2 を配付する。</li> <li>◎ 「学習プリント 1 ですすでに 16 cm と求めている」と勘違いしている生徒には，今回は円の並びが違うから，縦の幅も変わっているかもしれないことを助言する。</li> <li>◎ 手が止まっている生徒には，円の中心を結ぶとどんな図形ができるか，そこから分かることは何か，等を状況に応じて助言する。</li> <li>◇ 図の中から直角三角形や正三角形を見いだすことができたか。（観察・学習プリント）</li> <li>◇ 三平方の定理を利用して縦の幅を求めることができたか。（観察・学習プリント）</li> </ul>

<p>【10】</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ グループになり，互いの考えを伝え合う。</li> <li>○ グループで出た考え方を発表する。</li> <li>○ <math>8\sqrt{3} + 2</math> cmでは実際の長さが分かりにくいので，<math>\sqrt{3} = 1.73</math> として近似値で表してみる。  <math>8\sqrt{3} + 2 = 8 \times 1.73 + 2 = \underline{15.84}</math> (cm)  →牛乳ビンが40個入っていた時の縦の長さ16cmよりも短い！</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●自分の考えと異なる考え方はメモを取るよう伝える。</li> <li>●異なる考え方をしているグループを事前にチェックしておき，それぞれの考え方を前で発表させ，考え方を共有させる。</li> </ul>
<p>まとめ 【5】</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 身の周りで，円が敷き詰められているものの画像を見る。 <ul style="list-style-type: none"> <li>・重なっている土管</li> <li>・<math>5 \times 8 = 40</math> 個の箱入りのさくらんぼ</li> <li>・<math>5 \times 10 = 50</math> 本の箱入りのビン</li> <li>・<math>4 \times 6 = 24</math> 本の箱入りの缶コーヒー</li> <li>・5個入りのみかんパック</li> </ul> </li> <li>○ まとめ <p>身の周りには円で敷き詰められているものがたくさんある。少し工夫することで，容器に円が多く入ったり，円を入れるための容器の面積を小さくできたりする場合がある。また，その時の容器の縦や横の長さ，面積等の大きさは直角三角形や正三角形（三平方の定理）を活用することで計算できる。</p> </li> <li>○ 学習内容を振り返る。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>●大型テレビに映す。</li> <li>●学習プリント2の感想を記入させ，回収する。</li> </ul>

(3) 板書計画

 <p>40 個の円の 横の幅 10 cm 縦の幅 16 cm</p> <p style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">41 本の牛乳ビンを運ぼう</p>	<p style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">41 個の円の縦の幅を求めよう</p> <p>(グループで出た考え)</p>  <p style="text-align: right;">※それぞれの考え方を表す式、答えを書かせる</p>
---	---

<大型テレビ>

◆41 個目が入る過程

- ・重なっている土管
- ・ $5 \times 8 = 40$  個の箱入りのさくらんぼ
- ・ $5 \times 10 = 50$  本の箱入りのビン
- ・ $4 \times 6 = 24$  本の箱入りの缶コーヒー
- ・5個入りのみかんパック

の画像

まとめ

身の周りには円で敷き詰められているものがたくさんある。少し工夫することで，容器に円が多く入ったり，円を入れるための容器の面積を小さくできたりする場合がある。また，その時の容器の縦や横の長さ，面積等の大きさは直角三角形や正三角形（三平方の定理）を活用することで計算できる。