

第2学年A組 数学科学習指導案

平成30年6月19日(火) 第5校時

場所 2年A組教室

1. 単元名 「式の計算」

2. 単元の目標

文字を用いた式を活用することのよさを実感し、それを用いて数量や数量の間の関係を的確に表現し、説明しようとする能力や態度を養う。また、いくつかの文字を含む四則計算ができるようにする。そのために、

- ア. 文字を用いた式に関するいろいろな用語の意味を理解し、それが正しく使えるようにする。
- イ. 簡単な単項式、多項式での加法、減法、及び単項式どうしの乗法、除法の計算ができるようにする。
- ウ. 文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明することを理解できるようにする。
- エ. 目的に応じて簡単な等式を変形できるようにする。

3. 指導について(指導観)

a. 数学的考察⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾

・文字、記号について

代数学では、個別的に数を取り扱うほかに、数の個性ではなく、それらの間の関係を考察の対象とする。そのために、数の個性を取り去ってそれを文字、あるいは記号で代用して演算を行う。さらに数のみでなく、ひろく我々の考察の対象を文字、記号で表すのである。その利点で主なものは、

- 1, 表した結果が一般性を持つこと、
- 2, 筋道が明らかになり、推論が容易になること、
- 3, 文字、記号は抽象的なものを具体化する働きを持っていて、各要素間の関係を具体化し、直観的にすること。
- 4, 文字は思惟^{しゆい}の対象物を代表するが、逆に思惟の動向を指導する働きを持って形式の普遍化、形式不易の原理の確立、数概念の拡張等も容易になること、

である。

・文字を含む式について

2数を $2+3$ の和のように個別的に表す場合、その結果を $2+3=5$ と求めることはできるが、 5 は $1+4$ 、 $6-1$ などいろいろな^{うんざん}運算の結果得られる。 $a+b$ と表す場合、それ以上の計算はできないが、それはあくまでも a と b との値に応じて常に結果を計算できることから一般的であり、簡明である。「2数の和が a で、差が b であるような2数は何か。」という問題は、「 $x+y=a$ 、 $x-y=b$ より、 x 、 y を求めよ。」という問題に翻訳され、これから、 $x=\frac{a+b}{2}$ 、 $y=\frac{a-b}{2}$ が得られる。即ち、求める不明の数を

文字で表し、あたかも既知であるかのごとく取り扱って問題の数関係を表す。そうすることによって、問題の意味が鮮明になるし、また得た結果の法則性も明瞭に見て取ることができる。このように、言葉

を数字、文字、記号を用いて表したものを式、一般に成立する法則を表した式を公式という。

・代数式について

x を文字または変数とすると、 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ の形の式を x に関する 1 変数多項式又は整式という。ここで各 a_i は数を表しているとするのである。 a_i を x^i の係数といい、各 a_ix^i を 1 つの項という。特に、 a_0 は定数項と呼ばれる。すべての $a_i \in \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ に従い、 $f(x)$ を複素数、実数、有理数、整係数多項式という。 $a_n \neq 0$ のとき、 $f(x)$ の x に関する次数は n であるという。1 つの項からなる $f(x)$ を単項式という。多項式はいくつかの単項式の和である。一般に整式は加法、減法、乗法について閉じているが、除法については閉じていない。整式の除法については、分数式を生むことになる。

・式の変形について

式の変形にはいろいろあるが、それはすべて加法、乗法についての交換法則、結合法則、分配法則に基づいている。同類項をまとめるのも 1 つの変形である。要するに、今何が要求されているか、われわれの今の目的は何であるのかを明確に意識した上で、その要求、目的に適合した式の変形を行わなければならない。

以上から、次の 2 点を考察として取り上げる。

1 つ目は、文字に関する有用性についてである。利点として 4 点挙げているが、文字の役割という視点からみると一般性に着目した「プレースホルダーや変数として使われる文字」という側面と、具体化・特殊化に着目した「定数や未知数として使われる文字」という側面の 2 通りに分類できると考えられる。本単元「式の計算」では、後者に特化されがちであるが、本授業では特に比較検討場面において、前者の「プレースホルダーや変数として使われる」という側面に着目することも重視する。

2 つ目は、等式の変形についてである。関係を表す式を、等式の性質を用いて目的に合うようにする同値変形するが、その中に潜む数や文字を言葉の式によむことを指導しなければならないと考えられる。本授業では、数や図形の性質が成り立つことを示す際、数量を表す式を目的に応じて、加法、乗法についての交換法則、結合法則、分配法則を利用して変形できることを目指すものとする。また、1 つの整式に特化せずに生徒各々が思考し、表現した整式の意味を言葉の式で捉えることも重視する。

b. 数学教育的考察

・内容についての考察⁽²³⁾⁽²⁸⁾⁽³⁰⁾

小学校から高等学校までの式の計算に関連する内容の構成を単元の系統図を利用し、図 1 のように整理する。

本稿「2. 単元の目標」にあるように、本単元では次の 2 点を指導のねらいとしている。

- ・いくつかの文字を含む整式の四則計算ができるようにすること
- ・具体的な事象の中に数量の関係を見出し、それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりする能力を養うこと

1 つ目は、文字を含む整式の四則計算ができることである。文字を含む整式で使われる数の計算は、正の数の範囲では、整数は小学校第 4 学年までに、小数や分数は小学校第 3 学年から学習し、小学校第 6 学年で完了する。負の数に範囲に広げられるのは中学校第 1 学年の「正の数・負の数」の単元である。一方、

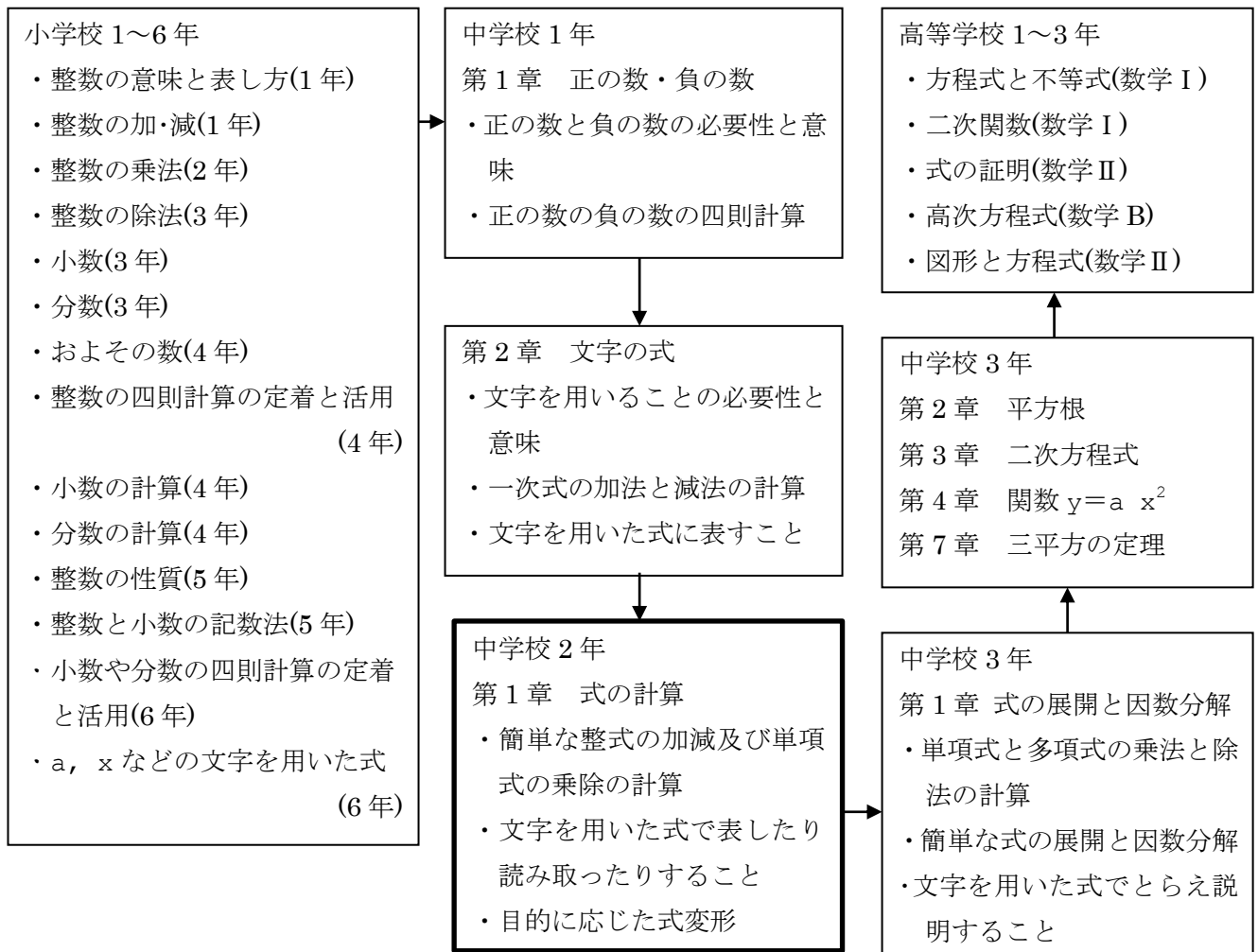


図1：小学校から高等学校までの式の計算に関連する内容の構成を単元の系統図

文字を含む整式で使われる文字の計算は、小学校の算数において指定された計算をするだけでなく、□に当てはまる数を求めるという逆算的な計算を学び、中学校第1学年で、文字の式について文字を用いることの必要性和意味、一次式の加法と減法の計算や文字を用いた式に表すことを学習してきた。また、上記系統図に示されていないが、中学校第1学年の一次方程式では等式の中に文字(未知数)があり、その文字の値を求めることを知り、一次方程式を等式の性質や移項の考え方を利用して解くことも学習しており、文字を含む方程式及び等式についての扱いを生徒は既知としている。以上を踏まえ、中学校第2学年では、それらをふまえて簡単な整式の加減及び単項式の乗除の計算について学習する。これらのことから、第2学年の指導においては、第1学年で学習した式の計算と関連付けながら、2つの文字を含む整式の計算方法を考えたり、複数の方法で計算したりすることを活動の中に入れることが大切であると考え。そして、これらを踏まえ中学校第3学年の式の展開と因数分解を学習することになる。単項式と多項式の乗法と除法の計算を学習した後、式の展開と因数分解につなげ中学校における代数式に関わる学習は終了する。1変数多項式、即ち、整式の扱いについて単に公式の理解と適用の範囲にとどめずに、一般に整式は加法、減法、乗法について閉じているが除法については閉じていないことを一部示唆することは、今後の整式計算の拡張にもつながっていくので、第3学年では確実に指導していきたいと考えている。

2つ目は、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりできるようにすることである。この点については、中学校第2学年において文字を用いた式で表したりよみ取ったりすることや目的に応じた式変形

について学習する。しかしながら、第2学年における「文字を用いた式を使った事象の説明」は、この段階の生徒にとって難しいことである。生徒が本学習に取り組みやすくするために、まず事象の中から数量の関係を帰納や類推によって発見的にとらえることからはじめ、次にそれを文字を用いた式を使って一般的に説明するという2段階で学習を進めるものとする。そして、これらを踏まえ中学校第3学年の式の展開と因数分解を学習することになる。単項式と多項式の乗法と除法の計算を学習した後、中学校第3学年では、それらをふまえて文字を用いた式の活用について学習する。

以上から、問題解決において今何が要求されていて、今の目的は何であるのかを明確に意識した「式表現⇔式変形⇔式よみ」を学習することが重要であると考えられる。特に、本授業においては、「式よみ」に焦点を当てた授業展開を行う。その理由として、単に問題にある事象を式表現で終了させるのではなく、その式に込められた意味を考察することで、逆に文字を用いることの必要性を感得させることを目指しているからである。

・方法についての考察⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽²³⁾⁽²⁵⁾⁽²⁷⁾

本校の数学科研究主題は、「数学的に考える資質・能力を育成するための指導法の工夫」である。数学的に考える資質・能力は、数学的思考力を核(中心)にしたものである。さらに、数学的思考の核(中心)となるものが、「問題解決(Problem Solving)」である。

そこで、「問題解決」とは何かを先行研究を基に考察する。問題解決に係る研究は、様々な角度から行われてきている。ここでは、予想と問題解決に焦点を当て、Polya(1954)と相馬一彦(2007)の研究を比較し、その問題点を探り、先行研究の不十分な点を明らかにする。

Polya(1954)⁽⁴⁾の研究は、問題解決(Problem Solving)についての多くの研究の基礎となっている。Polya(1954)は、問題の答えを見つけようとするには、15項目の問いかけリストを利用するとよいと提唱した。4つの区分に分割された問いかけリストの第2区分の一部と対応する部分における筆者による訳は、表2の通りである。

表2: Polya(1954)の4つの区分に分割された問いかけリスト第2区分の一部とその和訳

HOW TO SOLVE IT	どのようにして、問題を解くか(問題の解き方)
<p>Second. Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually <i>a plan</i> of the solution.</p> <p><i>Here is a problem related to yours and solved before.</i> Could you use it? Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?</p>	<p>第2. 与えられているもの(データ)と求めるもの(未知数)間の関係を見つけなさい。あなたは、もし直接の関係が見つからなければ、補助問題を考えなければならない。あなたは、最後に解決の計画を獲得すべきである。</p> <p>ここに、あなた自身と関連する以前に解いた問題がある。あなたは、以前に解いた問題を使ったか？ 以前に解いた問題の結果を使ったか？ 以前に解いた問題の解き方を使ったか？ できる限り、以前に解いた問題を使うために、いくつかの補助的要素を導入したか？</p>

上記表1では問いかけリスト第2区分に限定した形で着目したが、Polya(1954)によると問いかけリストに

は第1から第4の大きな区分がある。4つの区分は、次の通りである。「1, 問題を理解する(Understanding the problem)」、「2, 計画を立てる(Devising a plan)」、「3, 実行する(Carrying out the plan)」、「4, 振り返ってみる(Looking back)」。Polya(1954)は、この4つの区分はいずれも重要なものであると述べている。また、Polya(1954)は、数量に関する問題、図形に関する問題を例に取り上げ、問いかけリストの使い方を説明していることから、この問いかけリストは、学校数学はもちろんのこと、広く数学の問題を対象としているものであると考えられる。

また、問題解決の授業の指導過程における研究では、相馬一彦(2007)⁽⁷⁾は Polya(1954)の問題解決の過程や Dewey, J.(1950)⁽⁸⁾の反省的思考を参考にし、実際の授業場面での実践を通して、5段階の問題解決の授業の指導過程を構築した(図3)。なお、その際に比較する上で「説明中心の授業」を取り上げている(図2)。

「説明中心の授業」(教師の視点で)	
I 問題の提示	板書やプリント、教科書の問題を提示する。
II 自力解決	自分なりに考える時間を与える。
III 問題の解決	できた生徒を指名し、板書や発表により説明をさせた後、教師が再度説明する。または、生徒には説明させずに教師が説明する。

「問題解決の授業」(生徒の視点で)	
I 問題を理解する	提示された問題の意味を理解し、取り組もうとする。
II 予想	問題の結果や考え方について見当をつける。
III 課題をつかむ	IIで出された「予想」を確かめる過程で、新たな課題に気づく。
IV 課題を解決する	解決する過程で、新たな知識・技能、見方や考え方を身に付ける。
V 問題の解決	解決した課題の結果を活用して、はじめの問題を解決する。

図2: 「説明中心の授業」(教師の視点で)

図3: 「問題解決の授業」(生徒の視点で)

上記では、「教師の視点」と「生徒の視点」の違いこそあるが、「問題解決の授業」では、「II 予想」を重視し、その大切さを説いている。さらに、相馬(2007)が「問題解決の授業」の中で重視している段階である「II 予想」の場面において、予想とは見当をつけるにあたり問題の結果や考え方について行うことが示されている。

以上を踏まえ、Polya(1954)の「問いかけリスト」と相馬(2007)の「問題解決の授業」の解決過程を表3で比較した。なお、表3の段階又は過程における5段階は、Dewey(1950)⁽⁸⁾の提唱する反省的思考を基準にしている。

表3: Polya(1954)の「問いかけリスト」と相馬(2007)の「問題解決の授業」の解決過程の比較

段階又は過程	Polya, G(1954)の問題解決の過程	相馬一彦(2007) 問題解決の授業の指導過程
i. 問題把握	1, 問題を理解する(Understanding the problem)	I, 問題の提示(問題を理解する)
ii. 計画	2, 計画を立てる(Devising a plan)	II, 予想(予想する) III, 課題(課題をつかむ)
iii. 実行	3, 実行する(Carrying out the plan)	IV, 課題の解決(課題を解決する)

iv. 解の論理的組織化	4, 振り返ってみる(Looking back)	V, 問題の解決(問題を解決する)
v. 検証		

以上から、Polya(1954)の「問いかけリスト」と相馬(2007)の「問題解決の授業」に関して、問題解決の第2段階である「計画」場面で、両者の主張の類似点に着目すると次の表4のように整理することができる。

表4：問題解決の第2段階である「計画」場面

研究者	問題解決の第2段階である「計画」場面について
Polya(1954)	計画を立てる(Devising a plan)において、 「以前に解いた問題の結果を使ったか？ 以前に解いた問題の解き方を使ったか？」と思考することは、問題解決に有効である。
相馬(2007)	計画を立てる際において、 予想することが大切であり、予想とは問題の結果や考え方について見当をつけることである。

上記表4から問題解決の第2段階である「計画」場面においては、問題の結果や解き方、その考え方に着目することは、思考する上で有効である可能性が高いことがわかる。

ところで、問題(学習問題)と課題(学習課題)の違いにはさまざまな立場があるが、新井仁(2012)⁽²⁵⁾は、次のように述べている。

「問題」…授業において解決する対象となる内容。

「課題」…問題に対する解決方法の見通しや結果の予想に基づいて、
追求の前に捉える内容。要するに、「問題」は教師が提示
するもの、「課題」は生徒の意見などに基づいて明文化し、
板書するもの。 (p.14)

本授業では、新井仁(2012)⁽²⁵⁾の立場で解釈し使用するものとした。

続いて、本授業で改善を目指している点を示す。Polya,G(1957)が指摘しているように、児童・生徒は問題解決において、問題の結果の予想をすることは容易であるが予想した結果を利用して問題を解決する方法は困難である。また、相馬(2007)の問題解決型の授業の5段階では、「問題の結果の予想をすること」については授業の指導過程として有効であると述べられているが、「予想した結果を利用して問題を解決すること」との関係については授業の指導過程として、位置づけはされていない。以上から、思考場面においても思考指導場面においても、「予想した結果を利用して問題を解決すること」が不十分であることが分かる。それこそが、本授業で改善を目指している箇所である。

平成20年度から平成24年度全国学力・学習状況調査問題の結果を考察すると、数学B(主として「活用」に関する問題)における記述式問題を生徒が解決することは困難であることがわかる。清水宏幸(2012)⁽²⁷⁾は、全国学力・学習状況調査の数学B(主として「活用」に関する問題)の問題に関する分類を次のように3つに分類している。

- ①予想した事柄を数学的な表現を用いて説明すること(事実・事柄の説明)
- ②問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明すること(方法の説明)
- ③事柄が成り立つ理由を説明すること(理由の説明) (p.38)

清水宏幸(2012)⁽²⁷⁾ は、上記の 3 分類の問題すべてにおいて、数学的な表現を用いて適切に記述することに課題がみられると指摘している。その中で、本稿では「①予想した事柄を数学的な表現を用いて説明すること(事実・事柄の説明)」と「②問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明すること(方法の説明)」に着目し、生徒にとって問題解決することは困難であるということを 2 点明らかにする。

1 つ目は、「①予想した事柄を数学的な表現を用いて説明すること(事実・事柄の説明)」についての課題である。ここでは、平成 20 年度 B²(3)の問題を取り上げる(資料編の図 X)。図 X の解答例は、「2 けたの自然数とその数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は、9 の倍数になる。 (下線は本文から)」である。本問題は、正答率 49. 2%、無解答率 36. 1%であった。この結果を受けて、清水宏幸(2012)⁽²⁷⁾ は次のように述べている。

この結果から、問題を発展的に考え、予想した事柄を「～は、…になる。」という形で表現することに課題があることが明らかになった。文字式を用いて説明を行う際に、まずどのようなことが予想できるかを議論する場面を設定し、生徒共に前提と結論を確認し、それをノート等に「～は、…になる。」と命題の形で記述することを求めたい。その上で、予想した事柄について説明する活動を設定することが大切である。 (p.39)

このことから、生徒にとって思考の過程で予想した事柄を数学的に表現することは困難であることが明確になったと考えられる。

2 つ目は、「②問題解決の方法を数学的な表現を用いて説明すること(方法の説明)」についての課題である。ここでは、平成 24 年度 B⁵(3)の問題を取り上げる(別冊資料編の図 XI)。図 XI の解答例は、「二等辺三角形の性質を用いて、AE の長さを CE の長さに置き換える。」である。本問題は、正答率 25.3%、無解答率 41.2%であった。この結果を受けて、清水宏幸(2012)⁽²⁷⁾ は、次のように述べている。

この結果から、事象を数学的に解釈し問題解決の方法を数学的に説明することに課題があることが明らかになった。 (p.40)

このことから、生徒にとって問題解決の際に解決の方法を数学的に表現することは困難であることが明確になったと考えられる。

以上のことから、生徒にとって、数学 B (主として「活用」に関する問題) における記述式問題を解決することは困難であるということを明らかになった。即ち、数学 B (主として「活用」に関する問題) における記述式問題は、数学の問題解決で扱う問題の一例であることから、生徒にとって問題解決することは困難であるということが明らかになったと考えられる。

これらのことを受けて、本授業では生徒にとって問題解決することは困難であるということを改善するために、新たな問題解決型の授業の指導過程の枠組みを設定する。

清水宏幸(2012)⁽²⁷⁾ は、次のように述べている。

予想をする際には、正しい予想だけでなく誤った予想も取り上げ、全体でそれらが正しいかどうかを説明していく活動を取り入れることが大切である。(p.39)

これは、問題の提示の後、単に予想をするだけでなく、正しい予想ではない予想を大切であるということである。従って、誤った予想を含め広い視点から問題をみて、与えられた問題から考えられる予想をすべて思考することは有効であると考えられる。

また、「事象を数学的に解釈し問題解決の方法を数学的に説明することに課題がある」ことを踏まえ、「問題解決の方法」を授業における指導過程に取り入れることは問題解決することに対して有効であることが考えられる。そのため、本授業では「問題解決の方法」を「解決の見通し」として、指導過程に設定することとした。

以上を整理すると、問題解決型の授業における本授業の指導過程は次のようになる。相馬(2007)の問題解決型の授業の5段階の「Ⅱ. 予想」をさらに発展させて、第1段階で「問題の提示」、第2段階で「予想の種類把握」、第3段階で「各自の予想」、第4段階で予想したことを解決するための「解決の見通し」、第5段階で「課題の把握」という枠組みが問題解決型の授業の指導過程では重要であると考えられ、5つの指導の段階を表5のように設定した。また、本授業で提案する2つの指導過程は、それぞれ表5の通りである。

表5：問題解決型の授業の指導過程5段階

相馬一彦(2007) 問題解決の授業の指導過程	指導段階	指導過程	指導内容
I, 問題の提示 (問題を理解する)	第1段階		問題の提示
Ⅱ, 予想(予想する)	第2段階	第1の指導過程	予想の種類把握
	第3段階		各自の予想
	第4段階	第2の指導過程	解決の見通し
Ⅲ, 課題(課題をつかむ)	第5段階		課題の把握

これは、「予想の種類把握」と「解決の見通し」が相馬(2007)の問題解決型の授業に新しくつけ加えられていることを示している。また、授業における指導過程において「予想の種類把握(第3段階)」から「各自の予想(第4段階)」を経由して「解決の見通し(第5段階)」に流れる思考の順序が重要であることも示唆している。

c. 生徒の実態

4. 単元指導計画(13時間扱い) (本時 9/13)

時数	節項	指導目標	学習内容	観点別評価の規準			
				関心・意欲・態度	数学的見方や考え方	数学的技能	知識・理解
3	1 式の加法, 減法	<ul style="list-style-type: none"> ・世界一周道路の課題を考えることを通して, 式の計算の有用性を感じ, 文字式に関するいろいろな用語の意味を理解する。また, 簡単な多項式の加法, 減法の計算ができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・数量の関係をとらえ, 説明する際には, 式の計算を利用すると便利であることを知る。 ・文字の式に関連した用語の意味 ・同類項の意味と同類項をまとめること ・式の加法, 減法 	<ul style="list-style-type: none"> ・同類項をまとめる計算, 多項式の加法, 減法の計算を手際よくしようとしている。 ・同類項をまとめる計算, 多項式の加法, 減法の計算をしようとしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式の加法, 減法について, 1年で学習した計算をもとに考えたを導くことができる。 ・多項式の加法, 減法について, 1年で学習した計算をもとにして, その計算のしかたを考慮することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・簡単な多項式の加法, 減法の計算が手際よくできる。 ・簡単な多項式の加法, 減法の計算ができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・単項式, 多項式, 同類項などの用語の意味や多項式の加法, 減法の計算のしかたを, 1年で学習した計算と関連付けて理解している。 ・単項式, 多項式, 同類項などの用語の意味や多項式の加法, 減法の計算のしかたを理解している。
2	2 いろいろな多項式の計算	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数の乗法, 除法について理解し, 乗法, 除法の計算をしたり, 式を簡単にしてから代入して, 式の値を求めたりすることができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数の乗法, 除法 ・$(数 \times 多項式)$ の加減 ・式を簡単にしてから代入して, 式の値を求めること 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数の乗法, 除法の計算を手際よくしようとしている。 ・多項式と数の乗法, 除法の計算をしようとしている。 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数の計算について, 1年で学習した計算をもとに考えたを導くことができる。 ・多項式と数の計算について, 1年で学習した計算をもとにして, その計算のしかたを考慮することができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数の乗法, 除法の計算や式を簡単にしてから式の値を求めることができる。 ・多項式と数の乗法, 除法の計算や式を簡単にしてから式の値を求めることができる。 	<ul style="list-style-type: none"> ・多項式と数との乗法, 除法の計算のしかたを1年で学習した計算と関連付けて理解している。 ・多項式と数との乗法, 除法の計算のしかたを理解している。

2	3 単項式の乗法, 除法	・単項式どうしの乗法, 除法について理解し, 乗法, 除法の計算や乗除の混じった計算ができる。	・長方形の面積を 2 通りの式で表し, 比較することを通して, 単項式の積のきまりを見いだす。 ・単項式どうしの乗法, 除法 ・乗除の混じった単項式の計算	・単項式どうしの乗法, 除法の計算を手際よくしようとしている。 ・単項式どうしの乗法, 除法の計算をしようとしている。	・単項式どうしの乗法, 除法について, 1年で学習した計算をもとに考え, その計算のしかたを導くことができる。 ・単項式どうしの乗法, 除法について, 1年で学習した計算をもとにして, その計算のしかたを考えることができる。	・単項式どうしの乗法, 除法の計算や乗除の混じった計算が手際よくできる。 ・単項式どうしの乗法, 除法の計算や乗除の混じった計算ができる。	・単項式どうしの乗法, 除法の計算のしかたを, 1年で学習した計算と関連付けて理解している。 ・単項式どうしの乗法, 除法の計算のしかたを理解している。
4 (本時 2/4)	1 文字式の利用	・文字式を利用して, 数量の関係や数の性質を説明したり, 目的に応じて等式を変形したりすることができる。	・文字を用いた式で, 数量や数量の関係を表したり, 説明したりすること ・問題解決において予想をたて, その予想が成り立つ理由を説明する。 ・目的に応じて簡単な等式を変形すること	・数量の関係や数の性質を, 文字式を使って進んで明らかにしようとしている。 ・数量の関係や数の性質を, 文字式を使って明らかにしていこうとしている。	・数量の関係や数の性質を予想し, 文字式を使って考え, その過程をふり返ることができる。 ・数量の関係や数の性質を文字式を使って考えることができる。	・数量の関係を適切に文字式に表したり, 目的に応じて等式を変形したりすることができる。 ・数量の関係を文字式に表したり, 目的に応じて等式を変形したりすることができる。	・数量の関係や数の性質を文字式で表し, 説明することの必要性や意味, そのよさを理解している。 ・数量の関係や数の性質を文字式で表し, 説明することの必要性や意味を理解している。
2	基本のたしかめ						
	章末問題						
	千思万考「数字の順番を逆にする数」, 数学展望台「誕生日を当てる」						

5. 本時の目標

【生徒の学習に対する目標】

<数学的な見方や考え方>

- ・A: 問題解決において 今何が要求されていて①、今の目的は何であるのか②を明確に意識し、解決にあたることができる。(…◎本時の最重要評価とする)

【学習目標の達成を目指した指導者の指導の手立てに対する目標】

- ・A: 以前に解いた問題の結果や方法から、「解の見通し」①と 見通した解を示すための「解決の見通し」②を考えさせることができる。

以上のことを、具体的に表 9 のように整理した。

表 9：本時の目標についての問題ごとの生徒の反応項目の分類

	生徒の目標 →A： <u>今何が要求されていて</u> ① 指導者の目標→A'： <u>「解の見通し」</u> ①	生徒の目標 →A： <u>今の目的は何であるのか</u> ② 指導者の目標→A'： <u>見通した解を示すための「解決の見通し」</u> ②
[問題]	<p>【考え 1】2つの数は、上の数の十の位と一の位の数を入れ替えた数。</p> <p>【考え 2】2数の和は11の倍数である。</p> <p>【考え 3】2数の差は9の倍数である。</p> <p>【考え 4】斜めにある位の和どうしの積は4の倍数</p>	<p>【考え方Ⅰ】<u>特殊化の考え方の利用</u> 問題の4組以外の作ることができるすべての数の組も、確認する。</p> <p>【考え方Ⅱ】<u>一般化の考え方の利用</u> 文字を用いた式で、説明をする。</p> <p>【考え方Ⅲ】<u>図などの利用</u> 構造図などで説明する。</p>

6. 本時の展開

時配	学習活動と内容	○指導・支援，評価☆ ◎を本時の最重要評価とする。								
問題把握 10分	<p>[指示 1]「今日は、次のような問題を解決したいと思います。」</p> <div style="border: 2px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>[問題] 次のような数の組を観て、気づくことは何だろうか。</p> <table style="margin: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">63</td> <td style="text-align: center;">31</td> <td style="text-align: center;">52</td> <td style="text-align: center;">84</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">36</td> <td style="text-align: center;">13</td> <td style="text-align: center;">25</td> <td style="text-align: center;">48</td> </tr> </table> </div> <p>[指示 2]「問題を印刷した小プリントを配布します。ノートに貼ってください。」</p> <p>[指示 3]「全員で読み合わせます。問題を読んでもくれる人は、挙手してください。」(→挙手後、指名する。)</p> <p>[発問 1]「それでは予想される<u>解の見通し</u>を訊きます。どんな解が考えられますか。」(→挙手させて、生徒相互の立場を明らかにする。)</p> <div style="border: 2px solid black; border-radius: 20px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p><予想される生徒の反応></p> <p>【考え 1】2つの数は、上の数の十の位と一の位の数を入れ替えた数。</p> <p>【考え 2】2数の和は11の倍数である。</p> <p>【考え 3】2数の差は9の倍数である。</p> <p>【考え 4】斜めにある位の和どうしの積は4の倍数</p> <p>【考え 5】その他(2数の積や2数の除に対する予想、具体的な事柄が予想できない、分からないを含む)</p> </div>	63	31	52	84	36	13	25	48	<p>○掲示物[問題]を掲示する。</p> <p>○小プリントを配布する。</p> <p>○発問に対する生徒とのやり取りの中で、[問題]に対する理解を支援する。</p> <p>☆A'：予想される<u>解の見通し</u>①を考えさせることができたか。</p> <p style="text-align: right;"><指導者に対する評価></p>
63	31	52	84							
36	13	25	48							

<p>自力解決 20分</p>	<p>[発問 2]「見通した解を示すための『解決の見通し』を立てなさい。」</p> <div style="border: 2px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p><予想される生徒の反応></p> <p>【考え方Ⅰ】特殊化の考え方の利用 問題の 4 組以外の作ることができるすべての数の組も、確認する。</p> <p>【考え方Ⅱ】一般化の考え方の利用 文字を用いた式で、説明をする。</p> <p>【考え方Ⅲ】図などの利用 構造図などで説明する。</p> </div> <p>[指示 4]「さて、ここで今日の授業の課題をきめましょう。」</p> <p>[発問 3]「今日の授業の課題は、何でしょうか。」</p> <div style="border: 2px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p><予想される生徒の反応></p> <p>【考え i】「どんな場合でも言うためには、文字を用いることは有効だろうか。」 「文字を利用すると、上手く説明できるだろうか。」(文字の有用性)</p> <p>【考え ii】「2 数の和は 11 の倍数,2 数の差は 9 の倍数になるのだろうか。」 (命題の成立に対する真偽)</p> <p>【考え iii】「文字を利用して調べよう。」(文字の意味)</p> </div> <p>[指示 5]「今日の授業の課題は、次のようにします。」</p> <div style="border: 3px double black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>「文字を利用すると、上手く説明できるだろうか。」</p> </div> <p>[指示 6]「では、各自で問題に取り組みましょう。但し、教科書等で調べてもよいが、次の指示が出るまで相談はなしとします。先生が、回りますが先生に対する質問は可とします。時間は、8 分を予定しています。」</p> <p><学習活動の流れ></p> <p>(I)既習の解き方をもとに自力解決する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・教科書、ノート、ワークの利用 	<p>☆A'：見通した解を示すために、解決するための見通し^②を考えさせることができたか。 <指導者に対する評価></p> <p>○発問に対する生徒とのやり取りの中で、[本時の課題]に対する理解を支援する。</p> <p>○指導者の意図は、「命題の成立を確かめる確実な手立て」をどのように進めるかであり、「文字(式)」という言葉が課題に盛り込みたいが、生徒の中から上記の言葉が出てこない場合は、無理に上記の言葉を登場させず、生徒から出てきた言葉で課題を設定する。</p> <p>○本時の授業では、[発問 3]を中心発問と位置づける。</p> <p>○個人の考えを持つ時間を十分確保する。</p> <p>○取り組みが芳しくない生徒に机間指導(=支援+評価)をし、理解を助ける。</p> <p>○1つの【考え方】で解決できた生徒は、他の【考え方】でも解決できるように指示する。</p> <p>○机間指導の際に、【考え 2】、【考え 3】、【考え 4】の立場で説明する人を</p>
---------------------	---	---

↓

(Ⅱ)(8分後)【考え方Ⅰ】～【考え方Ⅲ】の立場で説明する人を指名し、Wボードの準備をさせる。

↓

(Ⅲ) Wボードの準備に5分程度かかる時間、他の生徒はリトルティーチャーの支援を相互に入れる。

<予想される生徒の反応>

【答案1】2数の和は11の倍数になること

2桁の整数を $10a+b$ とする。
 位を入れ替えた整数は、 $10b+a$ となる。
 2数の和は、 $(10a+b) + (10b+a)$
 $=11a+11b$
 $=11(a+b)$
 よって、2数の和は11の倍数

【答案2】2数の差は9の倍数になること

2桁の整数を $10a+b$ とする。
 位を入れ替えた整数は、 $10b+a$ となる。
 2数の差は、 $(10a+b) - (10b+a)$
 $=9a-9b$
 $=9(a-b)$
 よって、2数の差は9の倍数

【答案3】斜めにある位の和どうしの積は4の倍数であること

斜めにある位の数の和は、 $2a, 2b$ と表すことができる。

$$2a \times 2b = 4ab$$

よって、斜めにある位の和どうしの積は4の倍数である

指名することも予定しておく。

○必要に応じて、全体に共通する指示事項や確認事項を伝える。

○本時の授業では、自力解決を学習活動の中心と位置づける。

○個別指導時に指導者と学習者が相互に応答を繰り返すことにより、学習をすすめる問答法を利用しながら、解決の仕方を確認する。

○自力解決時の状況により、同じ箇所でのつまずきのある生徒が複数の場合、少人数指導を行い、理解を助けることを予定しておく。

☆【問題】における評価の水準とその手立て

	生徒の状態	左記に対する指導の手立て
A	一般化の考え方の利用 文字を用いた式で、説明をする。	1つの答案ができたなら、他の【考え2】、【考え3】、【考え4】についての答案づくりに取り組みさせる。
B	図などの利用 構造図などで説明する。	作成した図に文字式を入れて相互の関係を考察することを指導する
C	「解の見通し」及び「解決の見通し」が予想できない。	(i) 【考え2】、【考え3】、【考え4】の内、1つの事柄を選択させる。 (ii) 選択した事柄についての答案づくりに取り組みさせる。(まず、特殊化で、次に一般化の考え方で) (iii) 上記(i)(ii)の手順で、他の事柄についての答案づくりを指

		導する。 A…十分満足できる B…おおむね満足できる C…努力を要する
比較検討 15分	<p><学習活動の流れ></p> <p>(I) 「2数の和は11の倍数になること(…①)」、 「2数の差は9の倍数になること(…②)」、 「斜めにある位の和どうしの積は4の倍数であること(…③)」 という立場で、3人の生徒を指名計画により指名し、説明させる。</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p>(II) ①→②→③の順で行うが、①～③それぞれで、予想と確認させる。</p> <p>※ 必要に応じて、全体で問答法により進める。</p>	<p>☆A：問題解決において<u>今何が要求</u> <u>されていて</u>①、<u>今の目的は何である</u> <u>のか</u>②を明確に意識し、解決にあたる <u>ことができたか</u>。(…③)</p> <p style="text-align: center;"><数学的な見方や考え方></p> <p>○問答法を利用する際、意見が一部の生徒に偏らないように、いろいろな生徒の意見を拾いながらすすめる環境を整える。</p>
まとめ 5分	<p>[指示7]「最後に、今日のまとめをします。」</p> <div style="border: 3px double black; padding: 5px;"> <p>[まとめ]</p> <p>【内容】定数×文字で、倍数を示すことができる。</p> <p>【方法】文字を利用することで、一般的に(どんな場合も)説明できる。</p> </div>	<p>○本授業では、思考の過程を振り返り、授業冒頭の本時「課題」に照らす形で左記のようにまとめる。</p>

7. 準備物

教科書，ホワイトボード，掲示物[問題]，小プリント([問題])

10. 引用参考文献

- (1) 片桐 重男(1995). 数学的な考え方・態度とその指導 2 問題解決過程と発問分析. 東京: 明治図書.
- (2) Fehr, H. F. (1953). Theories of Learning Related to the Field of Mathematics. *NCTM 21th yearbook*. 32-40.
- (3) Dewey, J. (1950). (植田清次訳). 思考の方法. 東京: 春秋社.
- (4) Polya, G. (1954). (柿内賢信訳). いかにして問題をとくか. 東京: 丸善
- (5) Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orland, F. L. : Academic Press.
- (6) Lester, F. K, Jr. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving. Silver, E. A. (ed) (1985). *Teaching and Learning mathematical Problem Solving : Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, N. J: Lawrence Erlbaum Associates. 63-65.
- (7) 相馬 一彦(2007). 数学科「問題解決の授業」. 東京: 明治図書.
- (8) 相馬 一彦(1992). 数学教育における「予想」の意義. 第26回数学教育論文発表会論文集, 193-198.
- (9) 相馬 一彦(1993). 「予想」のための問題の開発. 第27回数学教育論文発表会論文集, 215-220.
- (10) 相馬 一彦(1996). 「問題解決の授業」の提案とその実践例. 第30回数学教育論文発表会・テーマ別部会 問題解決研究部会[発表], 21-28.
- (11) 一松 信(1979). 新数学事典. 大阪: 丸善.
- (12) 石谷 茂(1961). 数学教育事典. 東京: 明治図書.
- (13) 遠山 啓(1971). 現代化数学指導法事典. 東京: 明治図書.
- (14) 辰野 千壽(2005). 学習指導用語辞典. 東京: 教育出版.
- (15) 日本数学教育学会出版部(1985). 算数教育指導用語辞典. 東京: 教育出版.
- (16) 中原 忠男(2000). 算数・数学科の重要用語 300 の基礎知識. 東京: 明治図書.
- (17) 文部科学省(2008). 小学校学習指導要領. 東京: 東洋館.
- (18) 文部科学省(2008). 中学校学習指導要領. 東京: 東洋館.
- (19) Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- (20) Polya, G. (1954). (柴垣和三雄訳). 帰納と類比. 東京: 丸善.
- (21) Polya, G. (1964). (柴垣和三雄, 金山靖夫訳). 数学の問題の発見的解き方 1. 東京: みすず書房.
- (22) Polya, G. (1964). (柴垣和三雄, 金山靖夫訳). 数学の問題の発見的解き方 2. 東京: みすず書房.
- (23) 相馬 一彦(2000). 「問題解決の授業」に生きる「問題」集. 東京: 明治図書.
- (24) 相馬 一彦, 早勢 裕明(編著)(2011). 算数科「問題解決の授業」に生きる「問題」集. 東京: 明治図書.
- (25) 新井 仁(2012). 中学校数学科 授業を変える「板書」の工夫 45. 東京: 明治図書.
- (26) 三輪 辰郎(1992). (編), 日本とアメリカの数学的問題解決の指導. 東京: 東洋館.
- (27) 清水 宏幸(2012). 全国学力・学習状況調査の結果にみる中学校数学科の指導上の課題. 日本数学教育学会誌第94巻第9号, 38-41.
- (28) 相馬 一彦(2013). 予想で変わる数学の授業. 東京: 明治図書.
- (29) 相馬 一彦, 國宗 進, 熊倉 啓雄(編著)(2014). 略案で創る中学校新数学科の授業第3巻「関数・資料の活用」編. 東京: 明治図書.
- (30) 相馬 一彦, 國宗 進, 熊倉 啓雄(編著)(2011). 略案で創る中学校新数学科の授業第1巻「数と式」編. 東京: 明治図書.
- (31) 相馬 一彦(2017). 「主体的・対話的で深い学び」を実現する数学科「問題解決の授業」ガイドブック. 東京: 明治図書.